MATD41-Introdução aos modelos Lineares

1.1 – Espaços Vetoriais

Kim Samejima

IME-UFBA

Espaços Vetoriais

Um conjunto não vazio $\mathbb{V}$ é um *espaço vetorial* sobre $\mathbb{R}$ as seguintes operações são válidas sobre seus elementos(*vetores*):

- $u, v \in \mathbb{V}$, a a operação soma resulta em um elemento que também pertence a $u + v \in \mathbb{V}$;
- $u, v, w \in \mathbb{V}$, vale a propriedade associativa: $u + (v + w) = (u + v) + w$;
- O elemento nulo 0 pertence a $\mathbb{V}$;
- Para cada $v \in \mathbb{V}$, existe o elemento $-v \in \mathbb{V}$ tal que $v + (-v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$;
- $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{V}$, existe um vetor $\alpha v \in \mathbb{V}$ denominado produto escalar de α por v, satisfazendo a propriedade associativa da multiplicação: $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v), \alpha, \beta \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{V}$ e $1.v = v, \forall v \in \mathbb{V}$;
- Vale a propriedade distributiva: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ e $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathbb{V}$.

Conjunto Gerador I

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial. Um elemento $v \in \mathbb{V}$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{V}$ se existem os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k v_k.$$

Definição (Conjunto Gerador)

Seja B um subconjunto de $\mathbb{V}$. Dizemos que B é conjunto gerador de $\mathbb{V}$ se todo elemento de $\mathbb{V}$ for uma combinação linear de um número finito de elementos de B.

Nota: Se B é conjunto gerador para $\mathbb{V}$, então todos os subconjuntos de $\mathbb{V}$ que contenham B também são conjuntos geradores de $\mathbb{V}$. Da mesma forma, todos os conjuntos múltiplos de B também são geradores de $\mathbb{V}$.

Conjunto Gerador II

Exemplo

O conjunto $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é um conjunto gerador para o $\mathbb{R}^3$. Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$, teremos que:

$$(a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1).$$

Futuramente, veremos que este conjunto B possui propriedades importantes e que B é também base para $\mathbb{R}$.

Linearmente Independente I

Definição

Seja B um subconjunto de $\mathbb{V}$. Dizemos que B é linearmente independente (l.i.) se:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0, v_i \in B, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n$$

implicar em $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.
Se B não é l.i., dizemos que é linearmente dependente (l.d.)

Linearmente Independente II

Exemplo ([Boyd and Vandenberghe, 2018])

O conjunto $B = (a_1, a_2, a_3)$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -7 \\ 8.6 \end{pmatrix} \quad , \quad a_2 = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2.2 \end{pmatrix}$$

é um conjunto l.d. pois $a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 0$

Linearmente Independente III

Exemplo ([Boyd and Vandenberghe, 2018])

O conjunto $B = (a_1, a_2, a_3)$:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é um conjunto l.i. pois o sistema:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \begin{cases} \alpha_1 & & -\alpha_3 & = 0 \\ & -\alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \\ & \alpha_2 & +\alpha_3 & = 0 \end{cases}$$

admite como única solução $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Resultados importantes I

Proposição

Se $\mathbb{V}$ é um espaço vetorial finitamente gerado não nulo e $B = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é conjunto gerador de $\mathbb{V}$. Então todo conjunto l.i. em $\mathbb{V}$ possui, no máximo m elementos.

Proposição

Seja $\mathbb{V}$ um espaço vetorial e seja $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, n < \infty$ um conjunto l.i. em $\mathbb{V}$. Então se existir $u \in \mathbb{V}$ que não seja combinação linear dos elementos de B, então $\{v_1, \ldots, v_n, u\}$ é l.i.

Definição (Base)

Se $B \subset \mathbb{V}$ é um subconjunto gerador de $\mathbb{V}$ e é *l.i.*, então B é uma *base de* $\mathbb{V}$.

Definição

Dizemos que $\mathbb{V}$ é *finitamente gerador* se possuir um conjunto gerador finito.

Resultados importantes I

Teorema

Todo espaço vetorial finitamente gerado não nulo possui uma base.

Teorema

Seja $\mathbb{V}$ espaço vetorial finitamente gerado e B um conjunto l.i. em $\mathbb{V}$. Então existe uma base de $\mathbb{V}$ contendo B.

Teorema

Seja $\mathbb{V}$ espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e $B \subseteq \mathbb{V}$. São equivalentes:
(i) B é base para $\mathbb{V}$;
(ii) Cada elemento de $\mathbb{V}$ se escreve de maneira única como comb. linear dos elementos de B.

Referências I

Boyd, S. P. and Vandenberghe, L. (2018).
Introduction to applied linear algebra : vectors, matrices, and least squares.
Cambridge University Press.