MATD41-Introdução aos modelos Lineares

1.2.a – Matrizes

Kim Samejima

IME-UFBA

Matrizes I

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R}, \\ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m \end{array}$$

- Soma
- Multiplicação por escalar
- Multiplicação de matrizes
- Transposição

Propriedades Matriciais I

Sejam A e B matrizes e α e β escalares. Então

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $A - A = A + (-A) = O$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $(AB)C = A(BC)$

Transposição I

A transposição é a operação de troca das linhas pelas colunas. Seja $A_{m\times n} = (a_{ij}), i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$ matriz com m linhas e n colunas. Então define-se a matriz $A^\top_{n\times m}$ por:

$$A^\top = (a^*_{ji}), a^*_{ji} = a_{ij}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.$$

Propriedades:

- $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$
- $(A^\top)^\top = A$
- $(\alpha A + \beta B)^\top = \alpha A^\top + \beta B^\top$
- $(AB)^\top = B^\top A^\top$

Traço de uma matriz I

O traco é dado pela soma dos elementos da diagonal principal. Dado A_n matriz quadrada de ordem n, o traço de A ($tr(A)$) é:

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Propriedades: Sejam A e B matrizes. Então vale que

- $tr(A^\top) = tr(A)$
- $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
- $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
- $tr(AB) = tr(BA)$
- $tr(A^\top A) = 0$ se e só se $A = 0$.

Escalonamento de matrizes I

Seja A matriz $m \times n$. O *escalonamento* é uma operação que, por meio de operações elementares:

- Troca de posição das linhas
- Multiplicação de linhas por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo
- substituição de uma linha pela soma dela com outra(s)

resulta em uma matriz:

$$B = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{r1} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}, \ com\ r \leq m$$

tal que existem $1 \leq l_1 \leq \cdots \leq l_r \leq n$ tais que $b_{il_i} = 1$, para cada $i = 1, \dots, r$ e $b_{ij} = 0$ se $1 \leq j_i$.

Escalonamento de matrizes II

Exemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 4 & 2 \\ -6 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 5 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 0 & 4 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & -2/3 & 0 & 4/3 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

O sistema possui infinitas soluções. Dado $x_2 = 1,\ x_4 = 1/3$, por exemplo, teremos $x_3 = 3$ e $x_1 = 1 - 4/3 = -1/3$.

Posto I

- Dada uma matriz $A_{m\times n}$, definimos o seu posto como o número de linhas não nulas na forma escalonada.
- Alternativamente, seja l_i a i-ésima linha da matriz A, com $i = 1, ..., m$. O posto é o número de elementos linearmente independentes do conjunto $B = \{l_1, ..., l_m\}$.
- Expressaremos o posto de A pela função $R(.)$.
- No exemplo anterior, $R(A) = 2$.

Propriedades do posto I

- Sejam A e B matrizes de dimensões convenientes em cada propriedade. Então
  - $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$.
  - $R(AB) \leq min(R(A), R(B))$
- Sejam $M_{m\times n}$ matriz de posto r e seja A matriz não singular de ordem $m \times m$. Então $R(AM) = r$.
- Seja A matriz quadrada. Então $R(A) = R(A^\top A) = R(AA^\top)$.
- Sejam $A_{p\times m}$, $B_{m\times n}$ e $C_{n\times q}$ matrizes quaisquer. Então

$$R(ABC) \geq R(AB) + R(BC) - R(B).$$

Determinantes I

- Seja A_n matriz quadrada de ordem n. Se n=1 então o determinante de A, $det(A)$ será o próprio elemento de A.
- Se $n > 1$ então Sejam A_{ij}, $i, j = 1, ..., n$ o conjunto formado por todas as submatrizes de A formadas excluindo-se a linha i e a coluna j de A.
- Então,

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i} a_{ij} det(A_{ij}), \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} det(A_{ij}) \end{aligned}$$

Para algum i (primeira equação) ou j (segunda equação) fixado.

Propriedades dos determinantes I

Seja α escalar e $A = A_m$ matriz quadrada de ordem m.

- Se $det(A) = 0$ então A é dita singular e A não possui matriz inversa. Teo: A é invertível se e só se $det(A) = |A| \neq 0$.
- $|A| = |A^\top|$.
- $|\alpha A| = \alpha^m |A|$.
- Se A é matriz diagonal, triangular superior ou triangular inferior, então $|A| = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{mm} = \prod_{i=1}^{m} a_{ii}$.
  $det(I_m) = 1$.
- Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) de A forem iguais a zero, então $det(A) = 0$.
- Ao permutarmos duas linhas (ou colunas) de A, então o determinante de A muda de sinal.
- Se todos os elementos de uma linha (ou coluna) são múltiplos de α, então o determinante também será múltiplo de α.

Propriedades dos determinantes II

- O determinante não muda se substituirmos uma linha por uma combinação linear dela com as demais.
- Se duas linhas (ou colunas) são proporcionais, então $det(A) = 0$.
- $det(AB) = det(A).det(B)$.
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

Inversa I

Uma matriz quadrada A_n é dita *invertível* se existir uma matriz B_n tal que:

$$AB = I_n,$$

Denotaremos $B = A^{-1}$ a inversa de A.
Propriedades: Seja α escalar não nulo e $det(A) \neq 0$. Então:

- $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$
- $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $|A^{-1}| = |A|^{-1}$
- Se $A = diag(a_{11}, \dots, a_{nn})$ então $A^{-1} = diag(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}})$.
- Se $A = A^\top$, então $(A^{-1}) = (A^{-1})^\top$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Teorema

Seja M matriz invertível de ordem m. Suponha que $A_{m\times m}$ e $B_{n\times n}$ sejam matrizes não singulares e $C_{m\times n}$ e $D_{n\times m}$ matrizes quaisquer. Então, se M puder ser escrita como $M = (A + CBD)$ então:

$$M^{-1} = (A + CBD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}C(B^{-1} + DA^{-1}C)^{-1}DA^{-1}.$$

Demonstração.

Exercício. $\square$