MATD41-Introdução aos modelos lineares

6 – Decomposição do valor singular

Kim Samejima

IME-UFBA

SVD I

Diferente da decomposição espectral, pode utilizada para matrizes de qualquer tamanho, não apenas as quadradas.

Teorema 1

SVD Seja $A_{m \times n}$ de posto $r > 0$. Então existem P_m e Q_n, matrizes quadradas, ortogonais, tais que

$$A = PDQ^\top \qquad e \qquad D = P^\top AQ,$$

com $D_{m \times n}$ matriz definida por

$$D = \begin{cases} \Delta & , \quad se\ r = m = n \\ [\Delta, (0)] & , \quad se\ r = m < n \\ \begin{bmatrix} \Delta \\ (0) \end{bmatrix} & , \quad se\ r = n < m \\ \begin{bmatrix} \Delta & (0) \\ (0) & (0) \end{bmatrix} & , \quad se\ r < m, r < n \end{cases},$$

com Δ_r^2 matriz diagonal com os autovalores de $A^\top A$ e $AA^\top$.

SVD II

Corolário 1

Se A é matriz $m \times n$ de posto $r > 0$ então existem as matrizes P_1, $m \times n$ e Q_1 $n \times r$ tais que:

$$P_1^\top P_1 = Q_1^\top Q_1 = I_r \qquad e \qquad A = P_1 \Delta Q_1^\top,$$

com Δ^2 matriz $r \times r$, diagonal, contendo na diagonal principal os autovalores não nulos de $A \times A^\top$.

Exemplo - [Gruber, 2014] I

Calcular a decomposição do valor singular para a matriz A abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Posto de A=2;
- Calculemos agora $A^\top A$:

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 18 & -10 & 4 \\ -10 & 18 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix};$$

- $det(A^\top A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 28, \lambda_2 = 12, \lambda_3 = 0;$

Exemplo - [Gruber, 2014] II

- Autovetores de $A^\top A$:

$$(A^\top A)x = \lambda x \Rightarrow (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0)^\top, (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^\top, (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})^\top;$$

- Defina agora $\Delta = diag(\sqrt{28}, \sqrt{12})$ e a matriz Q_1 contendo em suas colunas os autovetores de λ_1 e λ_2;
- Note da SVD:

$$\begin{aligned} A &= PDQ^\top = [P_1, P_2]\begin{bmatrix} \Delta & (0) \\ (0) & (0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1^\top \\ Q_2^\top \end{bmatrix} \\ &= P_1 \Delta Q_1^\top, \\ \Rightarrow & \quad P_1 = AQ_1\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & 1/2 \\ 2/\sqrt{14} & 1/2 \\ -3/\sqrt{14} & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

Exemplo - [Gruber, 2014] III

- Agora Como P é matriz ortogonal, $PP^\top = I$ Resolvendo o sistema obtemos:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} & -5/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{12} & 4/\sqrt{42} \\ 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{42} \\ -3/\sqrt{12} & 0 \end{pmatrix};$$

- A decomposição do valor singular de A será portanto dada por :

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & 1/2 & 1/\sqrt{12} & -5/\sqrt{42} \\ 2/\sqrt{14} & 1/2 & 1/\sqrt{12} & 4/\sqrt{42} \\ -3/\sqrt{14} & 1/2 & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{42} \\ 0 & 1/2 & -3/\sqrt{12} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{28} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} & -1\sqrt{12} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix};$$

- Ou ainda, na forma do corolário:

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{14} & 1/2 \\ 2/\sqrt{14} & 1/2 \\ -3/\sqrt{14} & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{28} & 0 \\ 0 & \sqrt{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} & -1\sqrt{12} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Exercício I

Calcular a SVD das matrizes abaixo:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
M &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Resultados I

Teorema 2

Uma matriz simétrica $A_{n\times n}$ é não negativa definida SSE $tr(AB) \geq 0$ para qualquer matriz B não negativa definida.

Teorema 3

Suponha que A matriz não negativa definida com autovalores $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_s$. Então:

$$\lambda_s \leq \frac{x^\top Ax}{x^\top x} \leq \lambda_1, \text{ se } s = m,$$
$$0 \leq \frac{x^\top Ax}{x^\top x} \leq \lambda_1, \text{ se } s < m.$$

Referências I

Gruber, M. H. J. (2014).
Matrix algebra for linear models.
Wiley.