Lista 1 - MATD41

Kim Samejima

Setembro 24, 2020

Questão 01:

Sejam A e B dadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Encontre AB e BA.

Questão 02:

Seja A a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule seu determinante.

Questão 03:

Encontre o posto da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Questão 04:

Seja G matriz 5×5 e sejam:

$$A = I_5, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

de tal maneira que

$$G = A + CBD = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule G^{-1}.

Questão 05:

Calcule $A \otimes B$ e $B \otimes A$ nos seguintes casos:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

c) Dado $C^\top = (1,1)$ e A e B do item (a), calcule $A \otimes (B \otimes C) e (A \otimes B) \otimes C$.

Questão 06:

Seja P a matriz:

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}.$$

Encontre os valores de p_{13}, p_{23} e p_{33} tal que P seja matriz ortogonal.

Questão 07:

Um modelo linear escrito na forma matricial é dado pela equação geral:

$$Y = X\beta + \varepsilon. \tag{1}$$

Se tivermos 5 observações para este modelo, com 3 variáveis, então teremos:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \varepsilon_i, 1 \leq i \leq 5.$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ 1 & x_{13} & x_{23} & x_{33} \\ 1 & x_{14} & x_{24} & x_{34} \\ 1 & x_{15} & x_{25} & x_{35} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix}$$

Calcule $X^\top$X.

Questão 08:

Um modelo de ANOVA (*Analysis of Variance*) com 1 fator (3 níveis), desbalanceado, é também um modelo linear. Considere agora o modelo (1) escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{14} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \\ y_{31} \\ y_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{32} \end{bmatrix} \tag{2}$$

a) Escreva as 9 equações representadas em (2)
b) Calcule $X^\top X$.
c) Calcule $X^\top Y$.
d) Escreva o sistema de 4 equações dadas por $X^\top X\alpha = X^\top Y$, com $\alpha^\top = (\mu, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Questão 09:

Encontre os autovalores e autovetores das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 10:

Prove que, se T é matriz não singular, então A e TAT^{-1} possuem os mesmo autovalores. Ainda, se x é autovetor de A, então $y = Tx$ é autovetor de TAT^{-1}.

Questão 11:

Encontre os autovalores e autovetores das matrizes a seguir e escreva-as utilizando a decomposição espectral.

$$A = \begin{bmatrix} 68 & -24 \\ -24 & 82 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$D = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Questão 12:

Encontre os autovalores e autovetores de

$$M = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 3/2 \end{bmatrix},$$

e encontre P e Q tal que $M = P\Lambda P^{-1}$ e $M^\top = Q\Lambda Q^{-1}$.

Exercícios Complementares:

1) Mostre que, para qualquer matriz X, $X^\top X$ e $XX^\top$ são matrizes simétricas;

2) Sejam A e B são matrizes $m \times m$ simétricas. Mostre que AB é simétrica se e somente se $AB = BA$;

3) Seja A matriz idempotente, $m \times m$. Mostre que $I_m - A$ é idempotente;
4) Seja A matriz idempotente, $m \times m$. Mostre que BAB^{-1} é idempotente, com B matriz não singular;

5) Seja A matriz $m \times m$ e suponha que existe uma matriz T tal que $T^\top T = A$. Mostre que A é não-negativa definida.
6) Seja A matriz $m \times m$ não-negativa definida e B matriz $n \times m$. Mostre que $BAB^\top$ é uma matriz não negativa definida.

7) Mostre que, se A e B são matrizes não singulares, vale que:

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = A - A(A+B)^{-1}A = B - B(A+B)^{-1}B.$$